GIẢI CHI TIẾT
ĐỀ THI GIỮA HỌC KÌ 1
THPT CHU VĂN AN – HÀ NỘI

Câu 1: 1)

$$\cos 2x-3\cos x+2=0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x-1-3\cos x+2=0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x-3\cos x+1=0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x-1)(2\cos x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=1\\ \cos x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\\ x=\dfrac{-\pi}{3}+2k\pi\end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z}).$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $\mathrm{S}=\left\{2k\pi;\dfrac{\pi}{3}+2k\pi;\dfrac{-\pi}{3}+2k\pi\right\}(k\in\mathbb{Z}).$

2, $2\sin^2 x-3\sin 2x+6\cos^2 x=1.$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x-6\sin x.\cos x+6\cos^2 x=\sin^2 x+\cos^2 x$

$\Leftrightarrow \sin^2 x-6\sin x.\cos x+5\cos^2 x=0$

$\Leftrightarrow (\sin x-\cos x)(\sin x-5\cos x)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=\cos x\\ \sin x=5\cos x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=1\\ \tan x=5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\arctan 5+k\pi\end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z}).$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S=\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\pi;\arctan 5+k\pi\right\}(k\in\mathbb{Z}).$

Câu 2: 1)

$$\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x=2\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x=1\Leftrightarrow cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=1\Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{6}=2k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}+k\pi .$$

Mà $x\in\left[-\pi ;2\pi\right]$ nên: $\Rightarrow S=\left\{\frac{-11\pi}{12};\frac{\pi}{12};\frac{13\pi}{12}\right\}$.

2) Ta có: $\left|f\left(x\right)+m\right|=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x\right)+m=1\\ f\left(x\right)+m=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x\right)=1-m\\ f\left(x\right)=-1-m\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-m=\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x.\\ -1-m=\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x.\end{array}\right.$

Đặt $2x=t\Rightarrow t\in\left[0;\pi\right]$,khi đó ta có: $\left[\begin{array}{l} \sqrt{3}\,\mathrm{cost}+\mathrm{sint}=1-\mathrm{m}\\ \sqrt{3}\,\mathrm{cost}+\mathrm{sint}=-1-\mathrm{m}\end{array}\right.$.

Do phương trình: $\sqrt{3}\cos t+\sin t=k$ chỉ có tối đa 2 nghiệm thuộc $\left[0;\pi\right]$ nên ta có 2 trường hợp sau:

TH1: Phương trình $\sqrt{3}\cos t+\sin t=1-m$ có 2 nghiệm; phương trình $\sqrt{3}\cos t+\sin t=-1-m$ có duy nhất một nghiệm.

Điều kiện để hai phương trình trên có nghiệm là: $\begin{cases}\left(1-m\right)^2\le 4\\ \left(-1-m\right)^2\le 4\end{cases}\Leftrightarrow -1\le m\le 1.$

Khi đó ta có: $\sqrt{3}\cos t+\sin t=-1-m\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t+\frac{1}{2}\sin t=\frac{-1-m}{2}$.

$$\Leftrightarrow \sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{-1-m}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t+\frac{\pi}{3}=\arcsin\left(\frac{-1-m}{2}\right)+2k\pi\\ t+\frac{\pi}{3}=\pi-\arcsin\left(\frac{-1-m}{2}\right)+2k\pi\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

Để phương trình có một nghiệm duy nhất thuộc $\left[0;\pi\right]$ thì:

$$\Rightarrow \arcsin\left(\frac{-1-m}{2}\right)=\pi-\arcsin\left(\frac{-1-m}{2}\right)\Rightarrow \arcsin\left(\frac{-1-m}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\Rightarrow \frac{-1-m}{2}=1\Rightarrow m=-3.$$

Loại do không thỏa mãn điều kiện ban đầu.

TH2: Phương trình $\sqrt{3}\cos t+\sin t=1-m$ có 1 nghiệm; phương trình $\sqrt{3}\cos t+\sin t=-1-m$ có hai nghiệm.

Điều kiện để hai phương trình trên có nghiệm là: $\begin{cases}\left(1-m\right)^2\le 4\\ \left(-1-m\right)^2\le 4\end{cases}\Leftrightarrow -1\le m\le 1.$

Khi đó ta có: $\sqrt{3}\cos t+\sin t=1-m\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t+\frac{1}{2}\sin t=\frac{1-m}{2}$.

$$\Leftrightarrow \sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1-m}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t+\frac{\pi}{3}=\arcsin\left(\frac{1-m}{2}\right)+2k\pi \\ t+\frac{\pi}{3}=\pi-\arcsin\left(\frac{1-m}{2}\right)+2k\pi \end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z}).$$

Để phương trình có một nghiệm duy nhất thuộc $[0;\pi]$ thì:

$\Rightarrow \arcsin\left(\frac{1-m}{2}\right)=\pi-\arcsin\left(\frac{1-m}{2}\right)\Rightarrow \arcsin\left(\frac{1-m}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\Rightarrow \frac{1-m}{2}=1\Rightarrow m=-1$ (Thỏa mãn)

Vậy giá trị m để phương trình $|f(x)+m|=1$ có đúng 3 nghiệm thuộc $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ là: $m=1$.

Câu 3:

a) Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcd}\,(a\neq b\neq c\neq d; a\neq 0)$, do số đã cho chia hết cho 5 nên $d=0$ hoặc $d=5$.

TH1: Với $d=0; a\le 4$ thì khi đó có cách chọn a là 4; cách chọn b là 8; cách chọn c là 7. Khi đó số các số có thể lập được là: $4.8.7=224$.

TH2:Với $d=0; a=5$: Do số đó cần nhỏ hơn 5670 nên khi đó b sẽ nhỏ hơn hoặc bằng 6.

Nếu $b<6$ thì b sẽ có 4 cách chọn ; c sẽ có 7 cách chọn.

Nếu $b=6$ thì c sẽ có 4 cách chọn.

Khi đó số các số có thể lập được trong trường hợp này là: $4.7+4=32$.

TH3:Với $d=5; a<5$: Khi đó số cách chọn a là 4; cách chọn b là 8; cách chọn c là 7.Khi đó số các số có thể lập được là: $4.8.7=224$.

Vậy tổng số các số tự nhiên có 4 chữ số thỏa mãn bài toán là: $224+224+32=480$.

b) +Số cách chọn ra 5 học sinh mà không có nữ là: $C_6^5=6$.

+Số cách chọn ra 5 học sinh mà có một bạn nữ là: $C_6^4.C_4^1=60$.

+Số cách chọn ra 5 học sinh mà có hai bạn nữ là: $C_6^3.C_4^2=120$.

Tổng số cách chọn nhóm nhảy thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $6+60+120=186$.

Câu 4: a) Lấy $M(0;3)\in d$. Ảnh M' của M qua phép tịnh tiến là $M'(0+1;3-2)\Rightarrow M'(1;1)$

+ Đường thẳng $d'//d$ nên d' có vtpt là $(3;-4)\Rightarrow$ Phương trình

$d': 3(x-1)-4(y-1)=0\Leftrightarrow 3x-4y+1=0$

b) $(C):(x-1)^2+(y-2)^2=16$ có tâm $I(1;2)$ bán kính $R=4$

Ảnh của I qua phép vị tự là I' ta có:

$$\overrightarrow{EI'}=-2\overrightarrow{EI}\Rightarrow \begin{cases} x_{I'}-1=-2.0 \\ y_{I'}+2=-2.4 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} x_{I'}=1 \\ y_{I'}=-10 \end{cases}\Rightarrow I'(1;-10) \text{ là tâm của } (C')$$

Mặt khác (C') có bán kình là $2R=8$ nên có phương trình $(C'):(x-1)^2+(y+10)^2=64$

Câu 5: + Gọi $B(1-2b;b)$, $D(m;n)$

+ Khi đó

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \\ m^2+n^2-2m-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2b+3=1-m \\ b+1=3-n \\ m^2+n^2-2m-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=2b-3 \\ n=2-b \\ (2b-3)^2+(2-b)^2-2(2b-3)-4=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m=2b-3 \\ n=2-b \\ 5b^2-20b+15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=1;m=-1;n=1 \\ b=3;m=3;n=-1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} B(-1;1) \\ B(-5;3) \end{array}\right..$$