

GIẢI CHI TIẾT
ĐỀ THI GIỮA HỌC KÌ 1
THPT NHÂN CHÍNH – HÀ NỘI
BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.A	3.A	4.B	5.D	6.B	7.C	8.A	9.D	10.B
11.A	12.B	13.A	14.C	15.C	16.D	17.B	18.B	19.A	20.D
21.B	22.C	23.D	24.A	25.C	26.B	27.C	28.C	29.C	30.D
31.A	32.A	33.C	34.D	35.C	36.A	37.C	38.B	39.D	40.D

Câu 1: Ta có: $y = \frac{\sin 3x + 2 \cos 3x + 1}{\sin 3x + \cos 3x + 2} \Leftrightarrow (y-1)\sin 3x + (y-2)\cos 3x = 1-2y$.

Để biểu thức trên có nghiệm thì: $(y-1)^2 + (y-2)^2 \geq (1-2y)^2 \Leftrightarrow y^2 + y - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq y \leq 1$.

Chọn **C**.

Câu 2: ĐKXD: $-2 \leq x \leq 2$. Ta có:

$$+ \sqrt{4-x^2} \cdot \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4-x^2} = 0 \\ \sin 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x^2 = 0 \\ x = \frac{k\pi}{2} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \\ x = \frac{-\pi}{2} \\ x = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình có tất cả 5 nghiệm. Chọn **A**.

Câu 3: Mệnh đề A sai vì nếu đường thẳng không song song hoặc trùng với trục thì ảnh qua phép đối xứng trục sẽ không song song hoặc trùng với đường thẳng đó. Chọn **A**.

Câu 4: Để phương trình có nghiệm thì: $m^2 + 3^2 \geq 5^2 \Leftrightarrow m^2 \geq 16 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 4 \\ m \leq -4 \end{cases}$. Chọn **B**.

Câu 5: Để độ sau đạt giá trị lớn nhất thì: $\cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) = 1$. Khi đó ta có:

$$\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4} = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \frac{t+2}{8} = 2k \quad (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow t = 14. \text{ Vậy có một thời điểm độ sau lớn nhất.}$$

Chọn **D**.

Câu 6: Tọa độ đỉnh của hai parabol lần lượt là: $I(0; -3); I'(1; -2)$.

Khi đó véc tơ tịnh tiến là: $\vec{v} = \overline{II'} = (1; 1) \Rightarrow a+b = 2$. Chọn **B**.

Câu 7: Mệnh đề C sai vì phép quay góc quay 90° biến đường thẳng thành đường vuông góc với nó. Chọn **C**.

Câu 8: Ta có: $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - 2(1 - \cos^2 x) \cdot \cos^2 x$.

Khi đó phương trình đã cho tương đương với:

$$\cos^2 x = 1 - 2(1 - \cos^2 x) \cdot \cos^2 x \Leftrightarrow 2\cos^4 x - 3\cos^2 x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x = 1 \\ \cos^2 x = \frac{1}{2} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos x = -1 \\ \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x \in \left\{ 0; \pi; \frac{\pi}{4}; \frac{-\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{-3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4} \right\}$$

Tổng các nghiệm của phương trình là: 4π . **Chọn A.**

Câu 9: ĐKXD: $\sin 4x \neq -1 \Leftrightarrow 4x \neq \frac{-\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{-\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$. **Chọn D.**

Câu 10: Xét hàm số ở đáp án C ta có:

$$f(x) = |x| - \cos x = |-x| - \cos(-x) = f(-x). \text{ **Chọn B.}**$$

Câu 11: $\sin^2 3x - \sin 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x = -1 \\ \sin 3x = 2 \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow 3x = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$.

Do $x \in (0; 3\pi)$ nên: $0 < \frac{-\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} < 3\pi \Leftrightarrow \frac{1}{4} < k < \frac{19}{4} \Leftrightarrow k = 1; 2; 3; 4$. **Chọn A.**

Câu 12: $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{6} \end{cases} \left(\text{do } x \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right] \right)$. **Chọn B.**

Câu 13: Gọi $I; I'; R; R'$ lần lượt là các tâm và các bán kính của đường tròn ban đầu và đường tròn ảnh qua phép vị tự, khi đó ta có:

$$\begin{cases} \overline{OI'} = -2\overline{OI} \\ R' = 2R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I'(-2; -4) \\ R = 4 \end{cases} \Leftrightarrow (C'): (x+2)^2 + (y+4)^2 = 16. \text{ **Chọn A.}**$$

Câu 14:

Ta có:

$$-\sqrt{3^2 + 4^2} \leq 3\sin x + 4\cos x \leq \sqrt{3^2 + 4^2} \Leftrightarrow -5 \leq 3\sin x + 4\cos x \leq 5 \Leftrightarrow -4 \leq y = 3\sin x + 4\cos x + 1 \leq 6$$

Chọn C.

Câu 15: Thay $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ vào phương trình, khi đó ta có: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}$. **Chọn C.**

Câu 16: Ta có điểm $I(1;1) \in d$, ảnh I' của I qua phép đối xứng tâm O và tịnh tiến theo $\vec{v}(3;2)$ là:

$$\begin{cases} x_{I'} = 3 + -1 \\ y_{I'} = 2 + -1 \end{cases} \Rightarrow I'(2;1)$$

Do ảnh của đường thẳng d qua các phép biến hình trên là một đường thẳng d' song song với d nên:

$$\Rightarrow d': x - 2 + y - 1 = 0$$

$$\Rightarrow d': x + y - 3 = 0.$$

Chọn D.

Câu 17: $+2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

Vì đề bài yêu cầu tìm nghiệm dương

+ Nghiệm $\frac{\pi}{6} + k2\pi > 0 \Leftrightarrow k > -0,083$. Vậy k bé nhất bằng $0 \Rightarrow$ Nghiệm bé nhất bằng $\frac{\pi}{6}$

+ Nghiệm $\frac{5\pi}{6} + k2\pi > 0 \Leftrightarrow k > -0,416$. Vậy k bé nhất bằng $0 \Rightarrow$ Nghiệm bé nhất bằng

$$\frac{5\pi}{6}$$

Vậy nghiệm bé nhất của phương trình là $\frac{\pi}{6}$. **Chọn B.**

Câu 18:

Tacó:

$$\cos x - \sin x + 1 + \sin x \cdot \cos x = \cos x - \sin x + \frac{3}{2} + \left(\sin x \cdot \cos x - \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2} \right) = (\cos x - \sin x) + \frac{3}{2} - \frac{(\cos x - \sin x)^2}{2}.$$

Đặt $\cos x - \sin x = t (t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}])$, khi đó phương trình đã cho trở thành:

$$-\frac{t^2}{2} + t + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1(tm) \\ t = 3(loai) \end{cases}$$

$$\text{Với } t = -1 \Leftrightarrow \cos x - \sin x = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x = \pi + 2k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Mà $x \in (-\pi; 3\pi) \Rightarrow x \in \left\{ \pi; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2} \right\}$. Tổng các nghiệm là: $\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{2} = 4\pi$. **Chọn B.**

Câu 19: Hai đường thẳng song song có vô số tâm đối xứng (mỗi điểm nằm trên trục đối xứng của 2 đường thẳng đều là tâm đối xứng). **Chọn A.**

Câu 20: Gọi $T > 0$ là chu kỳ tuần hoàn của hàm số đã cho, khi đó ta có:

$$\sin 2x = \sin 2(x+T) = \sin(2x+2T).$$

$$\Rightarrow 2T = 2k\pi (k \in \mathbb{N}^*)$$

Chọn D.

$$\Rightarrow T = \pi.$$

Câu 21: + $y = \sin^2 x - 4 \sin x + 3 = (\sin x - 1)^2 + 2(1 - \sin x) \geq 0^2 + 2 \cdot 0 = 0$. (Do $\sin x \leq 1 \Rightarrow 1 - \sin x \geq 0$)

+ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$. **Chọn B.**

Câu 22: + Phương trình $a \sin x + b \cos x = c$ có nghiệm khi $a^2 + b^2 \geq c^2$

+ Áp dụng ta có phương trình đã cho có nghiệm khi

$$m^2 + 5^2 \geq (m+1)^2 \Leftrightarrow 2m \leq 24 \Leftrightarrow m \leq 12. \text{ Chọn C.}$$

Câu 23: + $2 \cos 2x + \cos x = 1 \Leftrightarrow 2(2 \cos^2 x - 1) + \cos x = 1 \Leftrightarrow 4 \cos^2 x + \cos x - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \\ \cos x = \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = \pm \arccos \frac{3}{4} + k2\pi \end{cases}$$

$$+ -\frac{\pi}{2} \leq \pi + k2\pi \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{3}{4} \leq k \leq \frac{1}{2} \Rightarrow k \in \{0\} \Rightarrow x = \pi$$

$$+ -\frac{\pi}{2} \leq \arccos \frac{3}{4} + k2\pi \leq 2\pi \Leftrightarrow -0,36 \leq k \leq 0,88 \Rightarrow k \in \{0\} \Rightarrow x = \arccos \frac{3}{4}$$

+

$$-\frac{\pi}{2} \leq -\arccos \frac{3}{4} + k2\pi \leq 2\pi \Leftrightarrow -0,13 \leq k \leq 1,12 \Rightarrow k \in \{0; 1\} \Rightarrow x \in \left\{ -\arccos \frac{3}{4}; -\arccos \frac{3}{4} + 2\pi \right\}$$

Do đó số nghiệm của phương trình là 4. **Chọn D.**

Câu 24: + Ta có: $y = \cos x + \sin x = \sqrt{1+1} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = \min y = -\sqrt{2} \\ M = \max y = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow mM = -2. \text{ Chọn A.}$$

Câu 25: + ĐKXD: $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow 2x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$.

Chọn C.

Câu 26: + Đường thẳng qua phép đối xứng tâm phải song song hoặc trùng với đường thẳng ban đầu nên B đúng. **Chọn B.**

Câu 27: + ĐKXD: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ 1 + \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}). \text{ Chọn C.}$

Câu 28: + Lấy $M(1;1) \in d$. Ảnh M' của M qua phép vị tự tâm O tỉ số 2 thỏa mãn:

$$\overline{OM'} = 2\overline{OM} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} - x_O = 2(x_M - x_O) \\ y_{M'} - y_O = 2(y_M - y_O) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} - 0 = 2(1 - 0) \\ y_{M'} - 0 = 2(1 - 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} = 2 \\ y_{M'} = 2 \end{cases} \Rightarrow M'(2;2)$$

+ Đường thẳng d' đi qua M' và song song với đường thẳng d nên có phương trình:

$$2(x-2) + (y-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + y - 6 = 0. \text{ Chọn C.}$$

Câu 29: + $(2 \sin x - \cos x)(1 + \cos x) = \sin^2 x \Leftrightarrow 2 \sin x + 2 \sin x \cos x - \cos x - \cos^2 x - \sin^2 x = 0$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x(1 + \cos x) - \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow (\cos x + 1)(2 \sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình là $x = \frac{\pi}{6}$. **Chọn C.**

Câu 30: + Ta có: $\vec{u} = \overline{MM'} = (-4; 2)$; $\vec{v} = \overline{M'M''} = (5; 3) \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (-4 + 5; 2 + 3) = (1; 5)$. **Chọn D.**

Câu 31: + ĐKXĐ: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}$

$$+ 2 \tan x - 2 \cot x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2 \tan x - \frac{2}{\tan x} - 3 = 0 \Leftrightarrow 2 \tan^2 x - 3 \tan x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 2 \\ \tan x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arctan 2 + k\pi \\ x = \arctan -\frac{1}{2} + k\pi \end{cases}$$

$$+ -\frac{\pi}{2} < \arctan 2 + k\pi < \pi \Leftrightarrow -0,85 < k < 0,647 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = \arctan 2$$

$$+ -\frac{\pi}{2} < \arctan -\frac{1}{2} + k\pi < \pi \Leftrightarrow -0,35 < k < 1,147 \Rightarrow k \in \{0; 1\} \Rightarrow x \in \left\{ \arctan -\frac{1}{2}; \arctan -\frac{1}{2} + \pi \right\}$$

Vậy trên $\left(-\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ phương trình có 3 nghiệm. **Chọn A.**

Câu 32: + Lấy $M(a; a^2) \in (P)$ có ảnh là $M'(b; a^2)$ khi đối xứng qua (d) (Do (d) vuông góc với trục hoành nên tung độ của điểm không đổi. Khi đó MM' nhận $x = 2$ là trục đối xứng

$$\text{nên } \frac{a+b}{2} = 2 \Leftrightarrow b = 4 - a$$

$$\Rightarrow M'(4 - a; a^2)$$

Thay $4 - a = m \Rightarrow a = 4 - m \Rightarrow a^2 = m^2 - 8m + 16$ do đó M' còn có thể biểu diễn thành

$$M'(m; m^2 - 8m + 16)$$

$$\Rightarrow M' \in (P'): y = x^2 - 8x + 16. \text{ **Chọn A.**}$$

Câu 33: + TH1: $m = 0 \Rightarrow 0 = -1$ (vô lý)

$$+ \text{TH2: } m \neq 0 \Rightarrow \cos x = \frac{m-1}{m}. \text{ Để phương trình có nghiệm thì } -1 \leq \frac{m-1}{m} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m-1}{m} \leq 1 \\ \frac{m-1}{m} \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m-1}{m} - 1 \leq 0 \\ \frac{m-1}{m} + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-1}{m} \leq 0 \\ \frac{2m-1}{m} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m \geq \frac{1}{2} \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2}. \text{ **Chọn C.**}$$

Câu 34: + Do $0 \leq \cos^2 x \leq 1 \Rightarrow 3 - 2.1 \leq y \leq 3 - 2.0 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq 3$. **Chọn D.**

Câu 35: + Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là $G\left(\frac{2+5-1}{3}; \frac{4+1-2}{3}\right) \Rightarrow G(2;1)$

+ Ảnh của G qua phép tịnh tiến \overline{BC} là G' thì

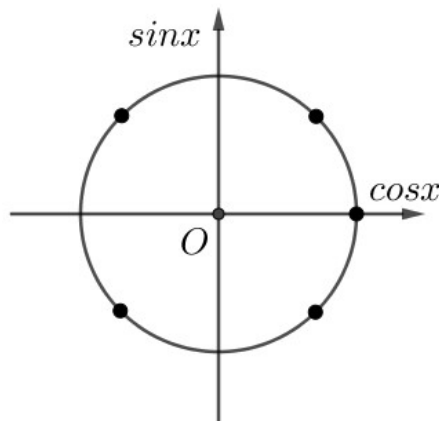
$$\overline{GG'} = \overline{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{G'} - 2 = -1 - 5 \\ y_{G'} - 1 = -2 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{G'} = -4 \\ y_{G'} = -2 \end{cases} \Rightarrow G'(-4; -2)$$

Chọn **C**.

Câu 36: + $\cos 3x + \cos x - 2 \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2 \cos 2x \cdot \cos x - 2 \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2 \cos 2x (\cos x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x = k2\pi \end{cases}$$

+ Số điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác là 5 theo hình vẽ dưới:



Chọn **A**.

Câu 37: + $2 \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$. Chọn **C**.

$$\text{Câu 38: } + 2 \sin^2 x + 2 \sin 2x = 3 - 2 \cos^2 x \Leftrightarrow 2 \sin 2x = 1 \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases}$$

Chọn **B**.

Câu 39: + Phương trình $a \sin x + b \cos x = c$ có nghiệm khi $a^2 + b^2 \geq c^2$

+ Áp dụng ta có phương trình đã cho có nghiệm khi

$$1^2 + 4^2 \geq m^2 \Leftrightarrow m^2 \leq 25 \Leftrightarrow -5 \leq m \leq 5. \text{ Chọn } \mathbf{D}.$$

Câu 40: + $(C): (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ có tâm $I(1; -2)$ bán kính $R = 3$

+ Ảnh của I qua phép tịnh tiến là $I'(1+3; -2+3) \Rightarrow I'(4; 1)$

+ Do đó (C') có tâm I' bán kính $R = 3$ nên có phương trình $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 9$.

Chọn **D**.